

Hong Kong Mathematics Olympiad (2023/24)

Heats – Group Event

香港数学竞赛 (2023/24)

初赛团体项目

Unless otherwise stated, all answers should be given in exact numerals in their simplest form.
No approximation is accepted.

The diagrams are not necessarily drawn to scale.

除特别指明外，所有答案须以数字的真确值表达，并化至最简。

不接受近似值。

所有附图不一定依比例绘成。

Part A

甲部

1. In Figure 1, $VABC$ is a tetrahedron such that $VA \perp VB$, $VB \perp VC$ and $VA \perp VC$. $VA = 5$, $VB = 4$ and $VC = 3$. If D and E are the mid-points of AB and AC respectively, find the volume of pyramid $VBCED$.

图一中， $VABC$ 是一个四面体，使得 $VA \perp VB$ 、 $VB \perp VC$ 及 $VA \perp VC$ 。 $VA=5$ ， $VB=4$ 及 $VC=3$ 。若 D 和 E 分别为 AB 和 AC 的中点，求角锥 $VBCED$ 的体积。

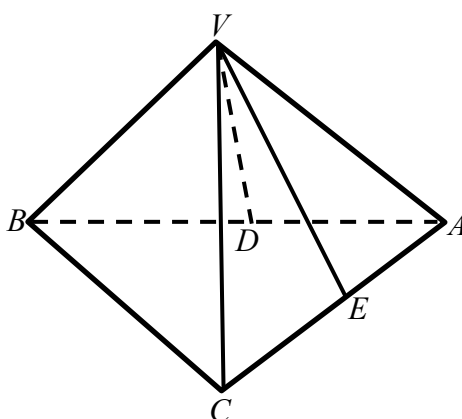


Figure 1

图一

2. In Figure 2, O is the centre of the circle $DEFGHI$. $\triangle ABC$ intersects the circle at D, E, F, G, H and I such that $AD = EB$ and $BF = CG$. If $\angle ABO = 38^\circ$ and $\angle ACO = 28^\circ$, find $\angle BOC$.

图二中， O 是圆 $DEFGHI$ 的圆心。 $\triangle ABC$ 与该圆相交于 D, E, F, G, H 及 I 使得 $AD = EB$ 及 $BF = CG$ 。已知 $\angle ABO = 38^\circ$ 及 $\angle ACO = 28^\circ$ 。求 $\angle BOC$ 。

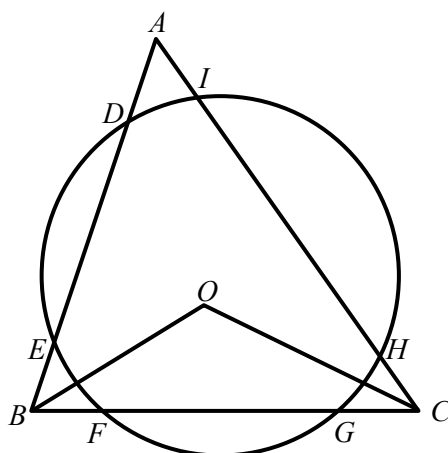


Figure 2

图二

3. Let a, b and c be positive integers. If $ab + c = 2023$ and $a + bc = 2024$, find the value of $a + b + c$.
 设 a, b 及 c 为正整数。若 $ab + c = 2023$ 及 $a + bc = 2024$ ，求 $a + b + c$ 的值。
4. In Figure 3, A_1, B_1 and C_1 are points on BC, AC and AB respectively such that $AC_1 = 2C_1B$, $BA_1 = 2A_1C$ and $CB_1 = 2B_1A$. If the area of $\triangle ABC$ is 21 square units, find the area of the shaded region.
 图三中， A_1, B_1 及 C_1 分别为 BC, AC 及 AB 上的点，使得 $AC_1 = 2C_1B$, $BA_1 = 2A_1C$ 及 $CB_1 = 2B_1A$ 。若 $\triangle ABC$ 的面积是 21 平方单位，求阴影部分的面积。

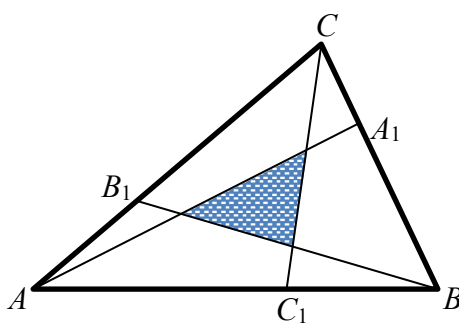


Figure 3

图三

5. Find the sum of the roots of the equation $(\log_4 x^2)^2 + 9 \log_x 64 = \pi^{3 \log_\pi 3}$.

求方程 $(\log_4 x^2)^2 + 9 \log_x 64 = \pi^{3 \log_\pi 3}$ 的所有根之和。

Part B

乙部

6. In Figure 4, three squares $ABCD$, $MNPQ$ and $MQRS$ of sides 1 cm touch each other so that points A and B are the mid-points of MN and MS respectively. Given that a circle contains all three squares and passes through points C , D , P and R , find the radius of the circle.

图四中，三个边长为 1 cm 的正方形 $ABCD$ 、 $MNPQ$ 、 $MQRS$ 并在一起使得点 A 及 B 分别为 MN 及 MS 的中点。已知一圆包含这三个正方形，且通过点 C 、 D 、 P 及 R ，求该圆的半径。

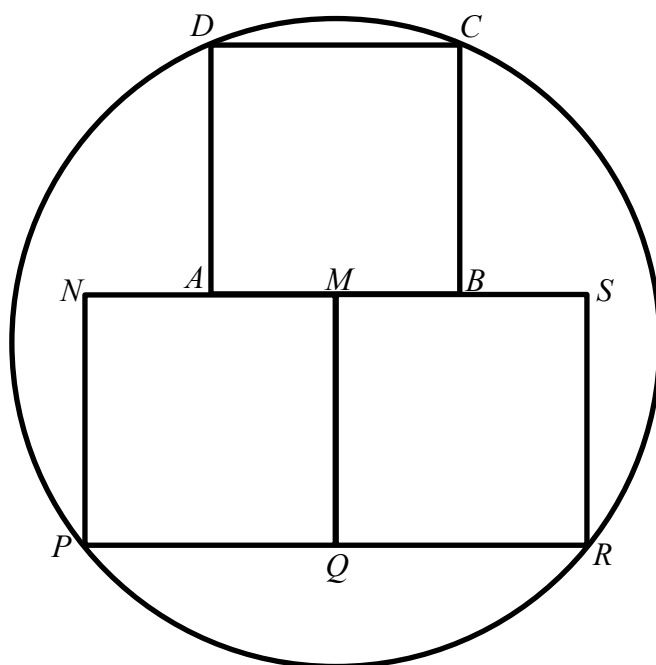


Figure 4

图四

7. If x, y and z are positive integers, find the number of sets of (x, y, z) satisfying $xyz = 10000$.
若 x, y 及 z 为正整数，求能满足 $xyz = 10000$ 的 (x, y, z) 组的数目。
8. Let a be a real number. If the equation $x^2 + ax + 6a = 0$ has two integral roots, find the difference between the largest and the smallest values of a .
设 a 为实数。若方程 $x^2 + ax + 6a = 0$ 有两个整数解，求 a 的最大和最小值之差。

9. If the lengths of the three sides of a triangle are the 25, 39 and 56, find the distance between the in-centre and the orthocentre of the triangle.

若三角形的边长为 25、39 及 56，求该三角形的内心及垂心之间的距离。

10. In Figure 5, $ABCDE$ is a regular pentagon, BD and CE intersect at P . If the area of $\triangle ABE$ is 1, find the area of $\triangle BPC$.

图五中， $ABCDE$ 为一正五边形， BD 及 CE 相交于 P 。若 $\triangle ABE$ 的面积为 1，求 $\triangle BPC$ 的面积。

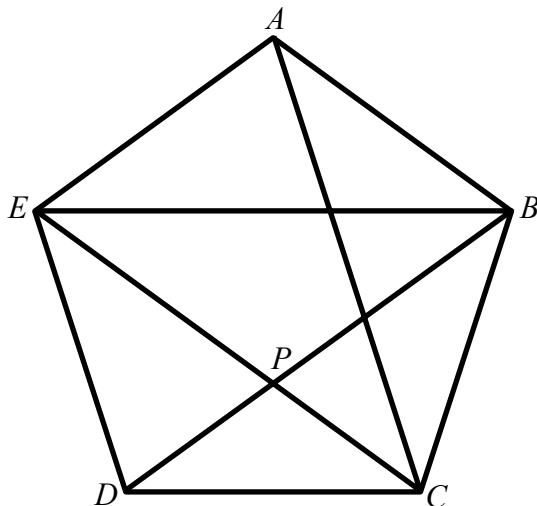


Figure 5

图五

完
END